

# CATASTROPHE DE TOULOUSE ET ACOUSTIQUE

Par J.-M. Arnaudès et Pierre Delezoide

Le 21 septembre 2001, des milliers de toulousains ont entendu deux explosions nettement séparées, une première sèche précédée de vibrations du sol, et une seconde assez monstrueuse, aérienne et dévastatrice en surface. La première explosion n'était pas anodine puisqu'elle a été entendue par un certain nombre de témoins jusqu'à Auzeville-Tolosane et à Castanet, respectivement à près de 7 kms et de 10 kms du pôle chimique.

Nous avons eu accès à quatre enregistrements acoustiques authentifiés des deux bruits d'explosions, réalisés fortuitement en différents lieux de l'agglomération toulousaine.

En analysant ces bandes sonores avec le logiciel SoundForge, et en tenant compte des indications des témoins, nous avons pour chacune de ces bandes évalué au 1/10 de seconde près la durée entre les débuts des bruits d'explosions au lieu d'enregistrement correspondant. Nous savons que des mesures par des moyens plus sophistiqués (filtrage, analyse spectrale et écoute des bandes à différentes vitesses) ont été réalisées indépendamment des nôtres et donnent très sensiblement les mêmes résultats. Cependant, pour des raisons techniques bien connues des acousticiens (incertitude sur les vitesses de défilement des bandes, entre autres) il est impossible de prétendre obtenir une précision inférieure à 0,15 secondes en plus ou en moins sur les durées réelles entre les bruits d'explosions en chacun de ces lieux.

Certains médias et organismes officiels ont fait état d'une " explication sismique " de ces deux bruits d'explosion : il y aurait eu une seule explosion mais cette explosion aurait créé des ondes sismiques qui, se propageant plus rapidement dans le sol que le son dans l'air, se seraient réfractées dans l'air au voisinage de chaque observateur et lui auraient ainsi donné l'impression d'entendre un bruit d'explosion précédant le bruit transmis par l'air. Ce point de vue nous semble difficile à soutenir sérieusement et en contradiction avec nos mesures. Nous n'en discuterons pas plus longuement ici parce que ce serait, pour cet article, hors sujet.

Cet article est donc l'exposé des conséquences nécessaires du présupposé que les deux bruits enregistrés sur chaque magnétophone étaient les effets acoustiques de deux explosions distinctes. Ce présupposé n'exclut nullement a priori que les explosions aient pu avoir même foyer, c'est-à-dire s'être produites au même endroit à quelques secondes d'intervalle, et c'est uniquement par raisonnement et calcul que nous prouverons qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire que le foyer de la première explosion ne peut pas être localisé dans le périmètre de l'usine AZF.

En conclusion, si on peut prouver que nos mesures sont gravement fausses et que l'hypothèse sismique ne peut pas être écartée, alors le présent article se réduit à un exercice théorique; mais si, comme nous le pensons, les deux bruits ont bien été aériens, alors les conclusions de cet article cernent de près la vérité.

## 1. Variabilité de la durée observée entre les deux bruits

Dans ce paragraphe et le suivant, nous négligerons la vitesse du vent. Nous verrons plus loin que le vent n'affecte que très marginalement les résultats tant que sa vitesse ne dépasse pas 10 m/s (ce qui était le cas le 21 septembre 2001 à Toulouse). Nous ne tenons pas compte non plus pour l'instant de l'effet de souffle des explosions. Nous nous placerons dans une zone de moins de 10 km de diamètre supposée calme et relativement plate, où l'on est sûr que le son se propage avec la célérité  $V_s$  donnée en m/s par la formule :

$$(1) \quad V_s = 330,7 \times \sqrt{1 + \frac{t}{273,15}}$$

où  $t$  désigne la température Celsius de l'air (pour  $t = 20$ , cette formule donne la valeur approchée  $V_s \cong 342 \text{ m/s}$ , et pour  $t = 23$ , elle donne  $V_s \cong 344,3 \text{ m/s}$ ). Pour abrégé, cette zone sera appelée *le plan*. Les *dates* se référeront à une base de temps universel de référence fixée une fois pour toutes et donc valable simultanément en tout point de la zone considérée.

Envoyons deux signaux sonores  $S_E$  et  $S_H$  depuis deux points  $E$  et  $H$ , à des dates respectives  $h$  et  $h + x$ , où  $x > 0$ . Un observateur note les dates d'arrivée des deux bruits.

**Cas particulier :  $E = H$ , deux explosions au même endroit**

Si l'observateur est à la distance  $d$  de  $E$ , il reçoit les signaux  $S_E$  et  $S_H$  aux dates respectives  $\theta_E = h + \frac{d}{V_s}$  et  $\theta_H = h + x + \frac{d}{V_s}$ . La durée entre les deux bruits reçus est donc pour lui  $\theta_H - \theta_E = x$ . On voit que *cette durée est indépendante de la position de l'observateur*.

**Cas général :  $E \neq H$**

Soit respectivement  $d_E$  et  $d_H$  les distances de l'observateur à  $E$  et  $H$ . Il reçoit le signal  $S_E$  à la date  $\theta_E = h + \frac{d_E}{V_s}$  et  $S_H$  à la date  $\theta_H = h + x + \frac{d_H}{V_s}$ . L'intervalle de temps observé entre les deux explosions est donc :

$$(2) \quad I = \theta_H - \theta_E = x + \frac{d_H}{V_s} - \frac{d_E}{V_s}$$

Soit  $D$  la distance entre  $E$  et  $H$ , d'après les inégalités triangulaires  $-D \leq d_H - d_E \leq D$  donc  $x - \frac{D}{V_s} \leq I \leq x + \frac{D}{V_s}$ . L'intervalle de temps observé entre les deux bruits dépend donc de la position de l'observateur tout en restant des limites fixes. Ceci est conforme aux observations, et nous verrons que c'est cette variabilité qui nous permet de localiser l'endroit de la première explosion.

## 2. Courbes de localisation en l'absence de vent

### Cas où le son des explosions se propage normalement depuis le foyer

Reprenons les notations de la partie précédente,  $E$  et  $H$  désignent les points d'où sont issus les signaux sonores  $S_E$  et  $S_H$  aux dates  $h$  et  $h + x$ , avec  $x > 0$ . Les signaux sonores seront supposés de durée négligeable devant  $x$ , ce qui exclut tout phénomène d'interférence entre les deux signaux. Nous exprimerons cette hypothèse en disant que les signaux sonores sont supposés *brefs*.

Soit  $F$  et  $F'$  deux points d'où l'on enregistre les arrivées de ces signaux, avec des intervalles de temps notés  $I_F$  et  $I_{F'}$ ;  $I_F$  est la différence entre les dates d'arrivée de  $S_H$  et de  $S_E$  en  $F$ , et  $I_{F'}$  est défini de même. On suppose  $H$  connu et  $E$  inconnu, et on veut localiser  $E$ .

Notons respectivement  $d_H$ ,  $d_E$ ,  $d'_H$ ,  $d'_E$  les distances  $FH$ ,  $FE$ ,  $F'H$  et  $F'E$ . La date d'arrivée en  $F$  de  $S_E$  est  $h + \frac{d_E}{V_s}$  et celle de  $S_H$  est  $h + x + \frac{d_H}{V_s}$ . L'intervalle de temps observé en  $F$  est donc :

$$(3) \quad I_F = h + x + \frac{d_H}{V_s} - \left( h + \frac{d_E}{V_s} \right) = x + \frac{d_H - d_E}{V_s}$$

et on voit de même que

$$(4) \quad I_{F'} = x + \frac{d'_H - d'_E}{V_s}$$

Par différence membre à membre, on en déduit :

$$(5) \quad I_F - I_{F'} = \frac{d_H - d'_H}{V_s} - \frac{d_E - d'_E}{V_s}$$

et par suite :

$$(6) \quad d'_E - d_E = 2a \quad \text{avec} \quad 2a = d'_H - d_H - (I_{F'} - I_F) V_s$$

Les intervalles de temps  $I_F$  et  $I_{F'}$  sont mesurés par les observateurs en  $F$  et en  $F'$  et les distances  $d_H, d'_H$  sont connues. L'équation (6) montre donc que  $E$  est nécessairement sur la courbe  $\mathcal{H}_{F,F'}$  lieu des points  $M$  du plan tels que  $MF' - MF = 2a$ .

La courbe  $\mathcal{H}_{F,F'}$  définie par (6) sera appelée **la courbe de localisation de  $E$  associée à  $F$  et  $F'$** . C'est une branche d'hyperbole (sauf théoriquement si  $2|a|$  est la distance entre  $F$  et  $F'$  ou si  $a = 0$ ).

Supposons maintenant disposer des mesures de trois observateurs, en  $F, F'$  et  $F''$ . Le point  $E$  sera commun aux trois branches d'hyperboles  $\mathcal{H}_{F,F'}, \mathcal{H}_{F',F''}, \mathcal{H}_{F'',F}$  ce qui permet de le localiser. Ces branches d'hyperboles sont bien concourantes car la somme des équations :

$$\begin{aligned} MF' - MF &= d'_H - d_H - (I_{F'} - I_F) V_s \\ MF'' - MF' &= d''_H - d'_H - (I_{F''} - I_{F'}) V_s \\ MF - MF'' &= d_H - d''_H - (I_F - I_{F''}) V_s \end{aligned}$$

est nulle.

Cette méthode de localisation sera appelée la **méthode des 3 décalages**.

### Prise en compte de l'effet de souffle

L'explosion crée un déplacement global de gaz, dit effet de souffle; ce déplacement global porte le son de telle sorte que la vitesse apparente de transmission au voisinage du foyer est plus grande que la vitesse de propagation  $V_s$  dans l'air immobile. Lors d'une explosion à souffle important cette vitesse apparente peut avoisiner 380 m/s dans les premières centaines de mètres et ne retrouver sa valeur normale,  $V_s$ , qu'à 1500 m du foyer. Le signal sonore, émis à l'instant 0 au foyer, atteint à l'instant  $t$  de manière isotrope les points à distance  $d(t)$  du foyer. La fonction  $t \mapsto d(t)$  dépend du type d'explosion et il est difficile de préciser ses valeurs, mais ce qui est certain c'est qu'elle se confond assez rapidement (pour une distance  $> d_c$ , distance critique, et un temps  $> t_c$ ) avec son asymptote de pente  $V_s$  d'équation  $d = \alpha + V_s t$ , où  $\alpha$  dépend de l'explosion; son graphe a donc pour forme:

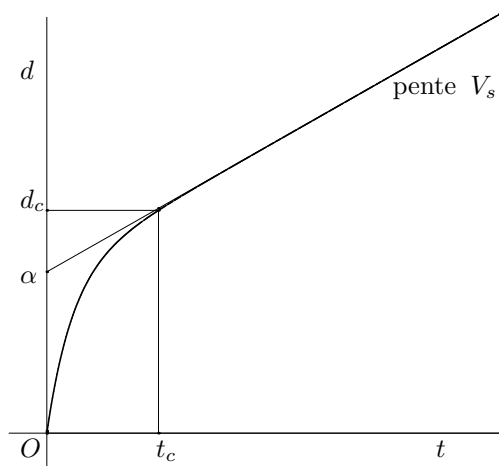


Figure 1.1

Les caractéristiques de deux explosions sont a priori différentes, mais partons de l'hypothèse, largement vérifiée ici, que les distances des observateurs aux foyers des explosions sont plus grandes que les distances critiques. Notons  $\alpha_H$  et  $\alpha_E$  les constantes (inconnues) associées aux explosions de foyers  $E$  et  $H$ . Les équations donnant  $I_F$  et  $I_{F'}$  deviennent de manière évidente :

$$(7) \quad I_F = h + x + \frac{d_H - \alpha_H}{V_s} - \left( h + \frac{d_E - \alpha_E}{V_s} \right) = x + \frac{d_H - d_E - \alpha_H + \alpha_E}{V_s}$$

$$(8) \quad I_{F'} = h + x + \frac{d'_H - \alpha_H}{V_s} - \left( h + \frac{d'_E - \alpha_E}{V_s} \right) = x + \frac{d'_H - d'_E - \alpha_H + \alpha_E}{V_s}$$

et la différence membre à membre de ces deux équations donne à nouveau les équations (5) et (6). On obtient rigoureusement la même courbe de localisation  $\mathcal{H}_{F,F'}$  que si les vitesses du son des deux explosions avaient été égales à  $V_s$  depuis leurs épïcêtres. On a donc démontré :

**THÉORÈME :** *Si les stations d'enregistrement sonore des deux explosions sont à une distance de chaque épïcêtre au moins égale à la distance critique de l'explosion correspondante, la méthode des décalages donne exactement la même courbe de localisation que si les propagations des sons des explosions avaient été normales dès leur émission.*

La méthode des trois décalages s'applique donc *ne varietur*.

### 3. Courbes de localisation avec prise en compte du vent et du souffle

Nous supposons ici que l'air ambiant est animé d'un mouvement de translation uniforme de vecteur vitesse  $\vec{v}$  supposée connue. Nous reprenons par ailleurs les notations et hypothèses des parties précédentes, en particulier celles concernant l'effet de souffle.

On peut considérer que l'explosion en  $E$  a eu lieu à l'instant  $h$  sur un chariot se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au sol, mais immobile par rapport à l'air ambiant. A l'instant  $t + h$ , le bruit de l'explosion atteint donc les points qui sont à distance  $d(t)$  de la position du chariot, le point  $E + t\vec{v}$ . Le signal  $S_E$  atteint donc l'observateur en  $F$  à l'instant  $\theta_E$  tel que  $\|\vec{FE} + (\theta_E - h)\vec{v}\| = d(\theta_E - h)$ . En supposant comme nous l'avons déjà fait que la distance au foyer est assez grande, cette relation devient :

$$(9) \quad \|\vec{FE} + (\theta_E - h)\vec{v}\| = \alpha_E + (\theta_E - h)V_s$$

De manière analogue, l'explosion en  $H$  ayant lieu à la date  $h + x$ , on obtient :

$$(10) \quad \|\vec{FH} + (\theta_H - h - x)\vec{v}\| = \alpha_H + (\theta_H - h - x)V_s$$

Nous pouvons écrire les égalités analogues relatives à l'observateur en  $F'$  :

$$(11) \quad \|\vec{F'E} + (\theta'_E - h)\vec{v}\| = \alpha_E + (\theta'_E - h)V_s$$

$$(12) \quad \|\vec{F'H} + (\theta'_H - h - x)\vec{v}\| = \alpha_H + (\theta'_H - h - x)V_s$$

Une équation en  $\tau$  du type  $\|\vec{u} + \tau\vec{v}\| = \alpha + \tau V_s$ , où  $\alpha < \|\vec{u}\|$ , a au moins une solution positive puisque  $\alpha < \|\vec{u}\|$  et que pour  $\tau$  grand  $\alpha + \tau V_s > \|\vec{u} + \tau\vec{v}\|$ , et a exactement une solution  $> 0$  car elle implique une équation du second degré en  $\tau$  dont le produit des racines est  $< 0$ . Les équations (10) et (12) déterminent donc les valeurs de  $\tau_H = \theta_H - h - x$  et de  $\tau'_H = \theta'_H - h - x$ , dans la mesure où on suppose  $\alpha_H$  connu. En utilisant ces valeurs, comme les intervalles de temps  $I_F = \theta_H - \theta_E$  et  $I_{F'} = \theta'_H - \theta'_E$  sont mesurés, on en déduit :

$$\theta_E - h = \theta_H - h - I_F = \tau_H + x - I_F \quad \text{et} \quad \theta'_E - h = \theta'_H - h - I_{F'} = \tau'_H + x - I_{F'}$$

En reportant dans les équations (9) et (11) on obtient les deux conditions :

$$(13) \quad \|\overrightarrow{FE} + (\tau_H - I_F + x)\vec{v}\| = \alpha_E + (\tau_H - I_F + x) V_s$$

$$(14) \quad \|\overrightarrow{F'E} + (\tau'_H - I_{F'} + x)\vec{v}\| = \alpha_E + (\tau'_H - I_{F'} + x) V_s$$

Considérant comme connues les constantes  $\alpha_H$  et  $\alpha_E$ , les inconnues dans ces équations sont la position de  $E$  et l'intervalle de temps réel  $x$  séparant les explosions. Nous allons voir qu'en éliminant  $x$  de ces équations on obtient encore, au moins pour de faibles valeurs de  $\vec{v}$ , une branche d'hyperbole pour l'ensemble des positions possibles de  $E$ . Pour simplifier le calcul, prenons un repère orthonormé dans lequel les coordonnées de  $\vec{v}$  sont  $(v, 0)$  avec  $v > 0$ ; les coordonnées de  $E$  et de  $H$  seront respectivement notés  $(x_E, y_E)$  et  $(x_H, y_H)$ . En élevant au carré chacune des équations on obtient :

$$\begin{aligned} ((x_E - x_F) + (\tau_H - I_F + x)v)^2 + (y_E - y_F)^2 &= (\alpha_E + (\tau_H - I_F + x) V_s)^2 \\ ((x_E - x_{F'}) + (\tau'_H - I_{F'} + x)v)^2 + (y_E - y_{F'})^2 &= (\alpha_E + (\tau'_H - I_{F'} + x) V_s)^2 \end{aligned}$$

On fait disparaître le terme en  $x^2$  et les termes en  $x^2_E + y^2_E$  en soustrayant ces équations membre à membre; on obtient ainsi  $x$  en fonction affine de  $x_E, y_E$  et en reportant cette valeur dans les équations (13) et (14), on obtient deux équations équivalentes d'une branche d'hyperbole. Si  $\vec{v} = 0$  la courbe trouvée est la branche d'hyperbole  $\mathcal{H}_{F, F'}$ , indépendamment des valeurs de  $\alpha_E$  et  $\alpha_H$ ; pour des valeurs faibles de  $v$  le lieu des positions possibles de  $E$  est une branche d'hyperbole voisine de  $\mathcal{H}_{F, F'}$ .

Les intervalles de temps  $I_F, I_{F'}$  et  $I_{F''}$  étant connus, et les valeurs  $\alpha_E$  et  $\alpha_H$  supposées connues, on obtient trois relations liant  $E$  et  $x$ ; en éliminant  $x$  entre chaque paire d'équations on trouverait 3 branches d'hyperboles concourantes et voisines de  $\mathcal{H}_{F, F'}, \mathcal{H}_{F', F''}, \mathcal{H}_{F'', F}$ . Ceci nous permet de dire que la méthode des 3 décalages donne une position approchée de  $E$  qui est dans une large mesure insensible à l'incertitude sur  $\alpha_E$  et  $\alpha_H$  si la vitesse du vent est faible, ce qui était heureusement le cas, le 21 Septembre 2001 à Toulouse.

## 4. Applications numériques et représentations graphiques

### Incertitudes

Les incertitudes les plus significatives portent sur les mesures des intervalles observés entre les bruits d'explosion. Les coordonnées des lieux d'observation ont été déterminées à l'aide du système de coordonnées Lambert II et leur incertitude est sans doute inférieure à 10m; ces mesures peuvent être précisées puisque les lieux existent toujours. Nous considérerons que les incertitudes sur les positions géographiques peuvent être englobées dans les incertitudes portant sur les mesures des décalages temporels. Un calcul simple prouve que la longueur du gradient du décalage temporel en fonction du lieu d'observation est  $\frac{2}{V_s} \sin(\theta/2)$  où  $V_s$  est la vitesse du son et  $\theta$  l'angle selon lequel les foyers des explosions sont vus depuis le lieu d'observation. Comme la première explosion n'a pu avoir lieu que sur le site AZF ou le site de SNPE, on voit que pour toutes les observations  $2 \sin(\theta/2) < 0.2$ ; une erreur de localisation de 34 m correspondrait donc dans le pire des cas à une erreur de 0,02 s, erreur négligeable par rapport à l'incertitude pesant sur les mesures temporelles.

Les mesures des décalages temporels proviennent de l'analyse de bandes sonores; ces enregistrements sont fortuits, résultats d'observations non reproductibles, obtenus à l'aide de matériels non prévus pour cet usage. Les enregistrements ont été effectués par des petits magnétophones portables pour lesquels la vitesse de défilement de la bande n'est pas asservie avec précision; elle est d'environ 4,75 cm/s mais elle a pu différer d'un appareil à l'autre, et différer de la vitesse de référence qui a servi à analyser ces bandes. D'autre part la reconnaissance de l'évènement " début de bruit d'explosion "

sur la bande n'est pas évidente ce qui induit un autre type d'erreur. Nous considérerons pour ces raisons qu'il est impossible de déterminer les décalages temporels, dont l'ordre de grandeur est de 7 à 10 secondes, à moins de 0,1 s près, si ce n'est 0,2 secondes.

### Utilisation d'un seul couple d'observations

A lui seul le couple d'observations Air-France Montaudran/Radio-présence permet d'établir, compte tenu des incertitudes, que l'explosion 1 a eu lieu dans une zone comprise entre deux branches d'hyperboles. On trouvera ci-dessous une représentation de ces branches d'hyperboles avec les données suivantes:

$H$  : Hangar 221 de AZF,  $x = 0.0$  m,  $y = 0.0$  m

$F$  : Radio-présence,  $x = 632.0$  m,  $y = 3216.0$  m,  $I_F = 7.7$  s, incertitude sur  $I_F$  : 0.15 s

$F'$  : Air-France Montaudran :  $x = 4066.0$  m,  $y = 691.0$  m,  $I_{F'} = 10.30$  s, incertitude sur  $I_{F'}$  : 0.15 s.

Température 22.5 degrés Celsius, d'où  $V_s := 330.7\sqrt{1 + 22.5/273.15} = 344.05$  m/s.

Correction due au souffle 1 :  $\alpha_E = 13.0$  m, correction due au souffle 2 : 167.0 m

Vitesse de vent 7 m/s avec un angle de  $-130$  degrés par rapport à l'Est.

Le repère utilisé est le repère orthonormé dont l'origine est le hangar 221 de l'usine AZF (foyer de la deuxième explosion) dont l'axe des  $x$  est dirigé vers l'Est et l'axe des  $y$  vers le Nord.

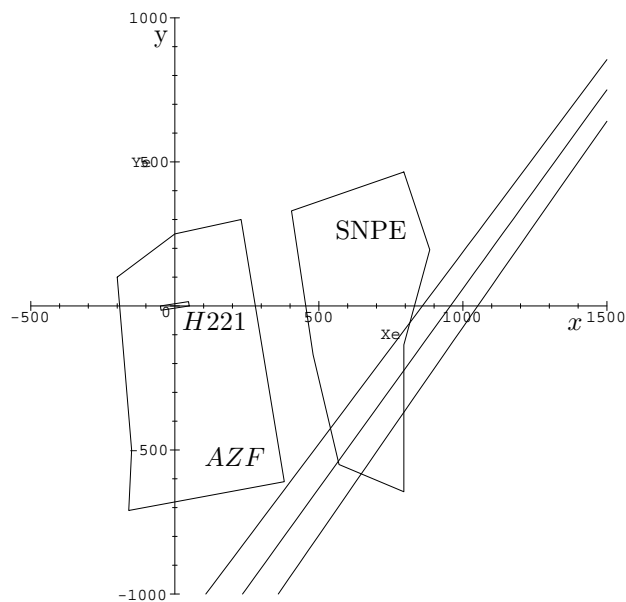
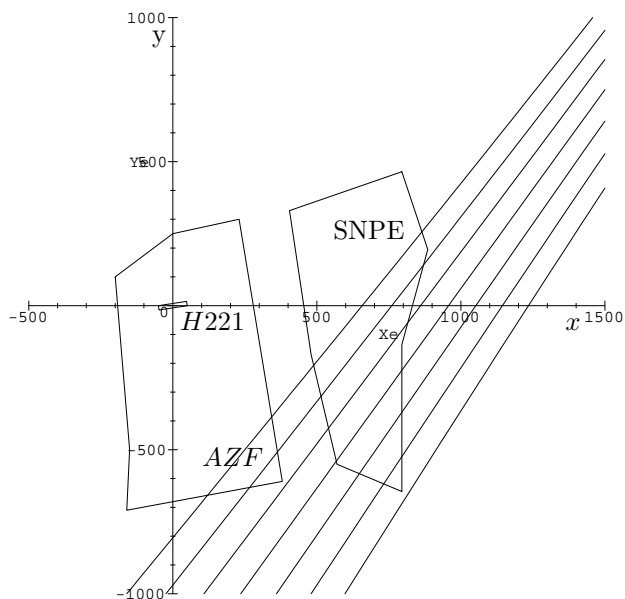


Figure 1.2

Les calculs et la représentation graphique ont été réalisées à l'aide de Maple. Trois branches d'hyperboles sont représentées : branche médiane correspondant à  $(I_F, I_{F'}) = (7.7, 10.3)$ , branche supérieure correspondant à  $(I_F, I_{F'}) = (7.85, 10.15)$ , et branche inférieure à  $(I_F, I_{F'}) = (7.55, 10.45)$ . Conformément à ce qui était attendu, les branches correspondant à  $(I_F, I_{F'}) = (7.85, 10.45)$  et à  $(I_F, I_{F'}) = (7.55, 10.15)$  sont pratiquement confondues avec la branche médiane, car avec un vent faible la branche d'hyperbole est très voisine de  $\mathcal{H}_{F,F'}$  qui ne dépend que de la différence  $I_F - I_{F'}$ .

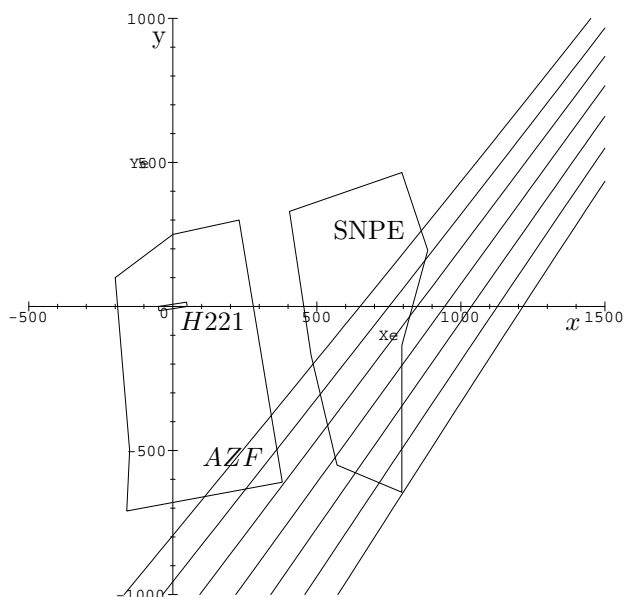
Voici les courbes analogues sans correction de souffle et avec un vent nul, mais avec les valeurs 0.15 s, 0.3 s et 0.45 s de l'incertitude sur les intervalles de temps :



**Figure 1.3**

On obtient au centre, comme attendu, 3 branches d'hyperboles très voisines de celles représentées dans la figure précédente. On voit qu'il faudrait une erreur extravagante sur la mesure des décalages temporels pour que la zone coupe le territoire de AZF suivant une partie plausible.

On peut aussi vérifier que ces courbes sont relativement insensibles à l'incertitude sur la température (qui influe sur la célérité du son), la vitesse et l'orientation du vent, l'importance des effets de souffle. Voici une figure réalisée avec les valeurs suivantes :  
 Température 10.0 degrés Celsius, d'où  $V_s := 330.7\sqrt{1 + 22.5/273.15} = 336.70$  m/s.  
 Correction due au souffle 1 :  $\alpha_E = 20.0$  m, correction due au souffle 2 : 200.0 m  
 Vitesse de vent 15 m/s avec un angle de  $-180$  degrés par rapport à l'Est.



**Figure 1.4**

### Utilisation des 4 d'observations

Comme Radio présence ( $F_3$ ) est proche de l'Hotel-Dieu ( $F_2$ ), il est clair que les intervalles de temps observés en ces deux points ne peuvent pas être indépendants. Autrement dit, si par exemple on estime les incertitudes à 0.2s, l'ensemble des valeurs possibles du couple  $(I_{F_3}, I_{F_2})$  n'est pas un carré de côté 0.4s mais seulement une partie de ce carré. D'une autre manière on peut considérer que la localisation obtenue ci-dessus entre deux branches d'hyperboles contraint la valeur de  $I_{F_2}$  à être dans un intervalle  $J'$  de longueur plus petite que l'intervalle  $J$  déterminé par l'incertitude de la mesure; le fait que  $J'$  recoupe  $J$  est une confirmation de l'interprétation que nous faisons de nos mesures.

Par la méthode des trois décalages, pour chaque triplet de valeurs de  $I_{F_2}, I_{F_3}, I_{F_4}$  ( $F_4 =$  Air France Montaudran), on a une localisation exacte du foyer de l'explosion 1 et une valeur  $x$  du décalage temporel exact entre les deux explosions. Mais d'après ce qui a été dit ci-dessus il serait absurde de faire varier le triplet  $(I_{F_2}, I_{F_3}, I_{F_4})$  dans un cube de centre les valeurs mesurées et d'en déduire une zone dans laquelle se trouverait le foyer  $E$  de la première explosion, car seuls certains triplets conduiront à des systèmes d'équations ayant des solutions raisonnables (ie  $E$  dans un rayon de 5km autour de AZF et  $0 < x < 15$  s).

Une solution vient du fait que nous disposons de 4 observations. Ce sont

$F_1$  : Faculté Dentaire,  $x_1 = 2700.0$  m,  $y_1 = -180.0$  m,  $I_{F_1} = 10.25$  s

$F_2$  : Hotel-Dieu,  $x_2 = 814.0$  m,  $y_2 = 3650.0$  m,  $I_{F_2} = 7.75$  s

$F_3$  : Radio-présence,  $x_3 = 632.0$  m,  $y_3 = 3216.0$  m,  $I_{F_3} = 7.7$  s

$F_4$  : Air France Montaudran :  $x_4 = 4066.0$  m,  $y_4 = 691.0$  m,  $I_{F_4} = 10.30$  s

Nous noterons  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  les intervalles de temps réels entre les arrivées des sons des deux explosions aux points  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . Nous allons démontrer que le 4-uplet  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$  est contraint à rester sur une hypersurface dont on peut (à l'aide de Maple) calculer une équation. En effet, le point  $E$  et le décalage  $x$  vérifient 4 équations analogues à (13) et (14) c'est-à-dire :

$$(15) \quad i = 1..4 \quad \|\overrightarrow{F_i E} + (\tau_{i,H} - \delta_i + x)\vec{v}\| = \alpha_E + (\tau_{i,H} - \delta_i + x) V_s$$

En élevant au carré et en retranchant aux équations 2, 3, 4 l'équation 1 on obtient trois équations linéaires en  $x_E, y_E, x$  (avec second membre) qui donnent une solution pour  $(x_E, y_E, x)$ , solution qui s'exprime en fonction des décalages  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ ; en reportant dans l'équation 1 initiale, on trouve une condition liant les 4 décalages. Nous appellerons l'hypersurface correspondante l'hypersurface des possibles.

Les incertitudes sur les décalages dépendent du lieu d'observation; nous pouvons en tenir compte en posant que les incertitudes sur les mesures des décalages sont  $\varepsilon_1$  en  $F_1$ , etc,  $\varepsilon_4$  en  $F_4$ . Compte tenu de ces incertitudes, l'ensemble des valeurs possibles pour le quadruplet  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$  est l'intersection de l'hypersurface des possibles et du polytope des incertitudes, produit cartésien des intervalles  $[I_{F_i} - \varepsilon_i, I_{F_i} + \varepsilon_i]$  pour  $i = 1..4$ . Pour chaque point de cet ensemble le système des 4 équations à trois inconnues  $(x_E, y_E, x)$  aura une solution et l'ensemble des points  $E = (x_E, y_E)$  correspondants sera la zone des positions possibles du foyer  $E$  de la première explosion.

Pour réaliser rapidement le calcul et pour obtenir une zone facilement représentable, nous pouvons linéariser en partie le problème et utiliser un peu de géométrie convexe. Si nous considérons que dans le polytope des incertitudes l'hypersurface est "plate", alors son intersection avec le polytope (convexe) est un convexe (compact)  $K$  d'un hyperplan; de plus comme ce polytope est défini par 8 contraintes linéaires (2 fois le nombre de coordonnées), ce convexe  $K$  est défini par (au plus) 8 contraintes linéaires dans cet hyperplan. Par théorème nous savons que  $K$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (ou sommets) qui sont en nombre fini; autrement dit  $K$  est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ses sommets. Les sommets de  $K$  sont les points

de  $K$  en lesquels le plus possible de contraintes sont des égalités; mais comme on est en dimension 3, si trois contraintes sont des égalités, le point est déterminé, donc aussi la valeur des autres contraintes. Sauf exception, les points extrémaux de  $K$  sont donc les points de l'hyperplan où 3 contraintes sont des égalités; ces points sont les intersections de l'hyperplan des possibles avec les arêtes du polytope des incertitudes car les arêtes du polytope ont pour éléments les points du polytope où 3 contraintes sont des égalités (du type  $\theta_j = I_{F_j} \pm \varepsilon_j$ ). Concrètement, pour chaque arête du polytope nous remplaçons dans les 4 équations (15) la seule coordonnée variable  $\theta_i$  (4 possibilités) correspondant à cette arête par sa valeur mesurée  $I_{F_i}$  plus une erreur inconnue  $u$  et les autres coordonnées  $\theta_j$ , ( $j \neq i$ ) par leur valeur constante sur cette arête, de la forme  $I_{F_j} \pm \varepsilon_j$  (8 possibilités, en tout 32 arêtes); nous résolvons ces 4 équations aux inconnues  $(x_E, y_E, x, u)$  en précisant que  $u$  doit être dans l'intervalle  $[-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ . Nous obtenons ainsi les points extrémaux de  $K$  (sans approximation linéaire) et les points  $E$  correspondants (ainsi que les décalages  $x$ ). Les points obtenus pour  $E$  sont tous dans ce qui est réellement possible. En reprenant l'hypothèse que nous pouvons linéariser le problème, nous considérons que l'ensemble des points  $E$  images des points de  $K$  est le convexe du plan  $\varphi(K)$ , image de  $K$  par une application affine  $\varphi$ . Le convexe  $\varphi(K)$  est défini lui aussi par des contraintes linéaires en nombre fini, et est donc l'enveloppe de ses points extrémaux, qui sont parmi les images par  $\varphi$  des points extrémaux de  $K$ . Nous considérerons donc que la zone des possibles pour  $E$  est l'enveloppe convexe des points  $E$  correspondants aux intersections de l'hypersurface des possibles avec les arêtes du polytope des incertitudes.

On comprend bien qu'en prenant des incertitudes trop petites, l'hypersurface des possibles ne coupera plus le polytope des incertitudes, puisqu'on part d'un quadruplet de valeurs mesurées qui n'a aucune raison d'être dans l'hypersurface des possibles. Le fait que l'hypersurface des possibles coupe le polytope des incertitudes est donc une confirmation de nos hypothèses et de notre estimation des incertitudes.

On trouvera ci-dessous une représentation graphique des zones possibles pour  $E$  en partant des incertitudes :

$$\varepsilon_1 = 0.15 \text{ s} \quad , \varepsilon_2 = 0.2 \text{ s} \quad , \varepsilon_3 = 0.15 \text{ s} \quad , \varepsilon_4 = 0.15 \text{ s}$$

et des incertitudes doubles. Ce calcul est cohérent avec le positionnement provenant uniquement des mesures  $I_{F_3}$  et  $I_{F_4}$  et le précise.

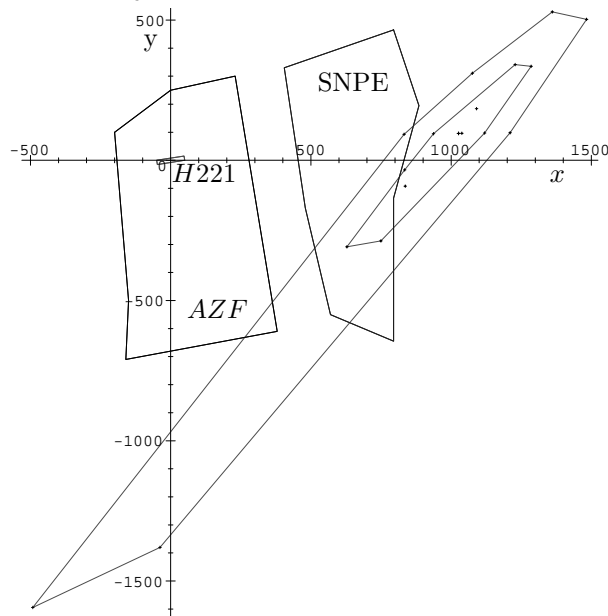


Figure 1.5

Dans ces calculs la valeur moyenne du décalage effectif  $x$  entre les deux explosions, pour les différents points extrémaux de  $K$  avec les incertitudes nominales est de 7.51 s (écart type 0.59). Ces calculs ont été menés sans tenir compte du vent ni des effets de souffle, puisque nous savions que ces effets étaient sans influence réelle sur la position de  $E$ . Mais comme les effets de souffle des deux explosions sont probablement assez différents, cela influe sur la valeur réelle du décalage estimé par  $x$ . Chacun des temps de parcours  $t_i$  du bruit de l'explosion 2 jusqu'à  $F_i$  est diminué de  $\alpha_H/V_s$ ; chacun des temps de parcours  $\tau_i$  du bruit de l'explosion 1 jusqu'à  $F_i$  est diminué de  $\alpha_E/V_s$ ; comme

$$\tau_i + I_{F_i} = x + t_i \quad \text{soit} \quad x = \tau_i + I_{F_i} - t_i ,$$

le décalage réel  $x'$ , compte tenu de l'effet de souffle, est :

$$x' = x + \frac{\alpha_H - \alpha_E}{V_s}$$

Des estimations indépendantes donnent  $\alpha_H = 167$  m et  $\alpha_E = 13$  m; cela conduit à estimer la valeur réelle  $x'$  du décalage à environ 8 s.